

UD 6. INTERES KONPOSATUA ETA ERRENTA KONSTANTEAK

1. INTERES ETA KAPITALIZAZIO KONPOSATUA

1.1. Kontzeptua: kapitalizazio konposatua

Kapitalizazio konposatuaren **ezaugarria** honakoa da: aldi (urte, hil, egun...) bakoitzean sortzen diren interesak hasierako kapitalari gehitzen zaizkio, hurrengo aldian interes gehiago sor dezaten.



Kapitalizazio konposatuan esaten da interesa kapitalizagarria dela, kapital bihurtzen dela.

Orokorrean epe luzeko finantza-eragiketetan erabiltzen da.

1.2. Nola kalkulatu azken kapitala (C_n), kapitalizazio konposatuan

C_n azken kapitala kalkulatu nahi da C_0 hasierako kapitala inbertituta, n urteko aldi batean, i urteko interes-tasa konposatuan. Azken kapitala formula honen bidez kalkula daiteke:



$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

$$I = C_n - C_0$$

- C_n : Bukaerako kapitala
- C_0 : Hasierako kapitala
- n : Iraupena (denbora)
- i : Interes tasa

$(1 + i)^n$ kapitalizazio konposatuaren **kapitalizazio-faktorea** da, eta kapitalak une zehatz batetik bestera mugitzeko balio du.

1.3. Nola kalkulatu hasierako kapitala (C_0), kapitalizazio konposatuan

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n \cdot (1+i)^{-n}$$

$$C_0 = C_n \cdot (1+i)^{-n}$$

$(1+i)^{-n}$ kapitalizazio konposatuaren **gaurkotze-faktorea** da, eta kapitalak une zehatz batetik bestera mugitzeko balio du.

1.4. Interes-tasa (i)

Formula orokorretik i askatzen dugu:

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

1.5. Denbora (n)

Formula orokorretik abiatuta:

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$$

*Oharra: kalkulagailuan "log" sakatu beharrean "ln" sakatuko dugu.

ARIKETAK

1. Pertsona batek finantza-erakunde batean 30.000 euro ezartzen ditu 4 urtean, urteko % 10eko interes-tasa konposatuan. Kalkulatu 4 urteren buruan zenbat diru jasoko duen.
2. Kalkulatu duela 6 urte finantza-erakunde batean jarritako kapitala, gaur 50.000 euro lortu baditut, urteko % 7,5eko interes-tasa konposatuan.
3. Kalkulatu pertsona batek 4 urteren buruan ordaindu beharko dituen interesak. 14.200 euroko mailegua eskatu zuen, urteko % 11,5eko interes-tasa konposatuan.
4. Zein interes-tasan jarri genituen 900.000 euro 4 urtean, 1.400.000 euro lortzeko?
5. Zenbat denbora beharko dut urteko % 7ko interes konposatuan jarritako kapitala bikoizteko?
6. Finantza-erakunde batean 415.000 euro ezarri nituen urteko % 9,5eko interes-tasa konposatuan. Gaur 1.028.464,46 euro jaso baditut, zenbat urte igaro dira?
7. Kalkulatu azken kapitala 40.000 euro jartzen baditut 4 urtean, urteko % 8ko interes-konposatuan.
8. Kalkulatu banku-erakunde batean jarri beharko dugun kapitala urteko % 8ko interes konposatuan, 4 urteren buruan 40.000 euro lortzeko.
9. Zehaztu mailegu-emaile bati emango dizkiogun interesak 2 urteren buruan, gaur mailegu gisa 50.000 euro hartu baditugu, urteko % 9ko interes konposatuan.
10. Zein interes-tasan jarri genituen 4.000.000 euro 2 urtean, azken kapitala 5.000.000 eurokoa bada?
11. Zenbat denbora beharko da urteko % 11ko interes konposatuan jarritako 1.500.000 euro 2.000.000 euro bihurtzeko?
12. Zenbat denboraren buruan lortuko du bere balioaren bikoitza urteko % 10eko interes konposatuan jarritako kapitalak?

- 13.** Kreditu-erakunde bateko bezeroak 20.000 euroko gordailua egiten du 3 urtetan, urteko % 9ko interes-tasa konposatuan. Kalkulatu 3 urteren buruan jasoko duen zenbatekoa.
- 14.** Bilatu hasieran jarri genuen kapitala, urteko % 9ko interes konposatuan, 5 urteren buruan 25.000 euro lortu baditugu.
- 15.** Sozietate batek 100.000 euroko mailegua jaso du gaur, 4 urteren buruan itzultzeko. Zenbateko interesak ordaindu beharko ditu, urteko interes-tasa % 10eko konposatua bada?
- 16.** Kontu batean 8.540 euro sartzen baditugu 6 urtetan, urteko % 3,5eko interes konposatuan, zenbat diru edukiko dugu?
- 17.** Kontu korrante batean 1.800 euro sartzen ditut urteko % 3,5eko interes konposatuan. Kalkulatu 5 urtean sortuko dituen interesak.
- 18.** Zein interes-tasa konposatutan jarri genituen 17.242,12 euro, 2 urtean 25.829,94 euro lortzeko?
- 19.** Zenbat denbora beharko da 75.000 euroko kapitalarekin 90.000 euro lortzeko, urteko % 7ko interes konposatuan?
- 20.** Kalkulatu duela 8 urte kontu batean jarritako kapitala, urteko % 3ko interes konposatuan, gaur kontuan 9.972,33 euro baditut.
- 21.** Zein interes-tasa konposatutan jarri genituen 18.520 euro, 3 urtean 2.312,48 euroko interesak sortzeko?
- 22.** Kontu korrante batean 100.000 euro sartzen ditut urteko % 6ko interes konposatuan. Zenbat denboraren buruan erosi ahal izango dut 162.000 euroko lokala?
- 23.** 6.000 euro inbertitzen baditugu urteko % 4,5eko interes konposatuan, 8 urtean zenbateko interesak lortuko ditugu?

1.6. Urteko kapitalizazioa, urte-kopurua zenbaki zehatza ez denean

Gerta daiteke urteko kapitalizazioa kalkulatu nahi dugula eta denbora urte osoa ez izatea. Adibidez, 5 urte eta 3 hileko kapitalizazioa, 4 urte eta 5 hilekoa...

Ebazteko, kapitalizazio konposatuko formula erabiliko dugu, eta, denbora adierazteko, urteak dezimalekin jarriko ditugu. Kalkuluak zehatzagoak izateko beharrezkoa da ahalik eta dezimal gehien hartzea.

Adibidea: 3 urte eta 5 hilabete: $3 + \frac{5}{12} = 3,416666667$ urte, edo $\frac{41}{12}$ urte

1.7. Interes-tasa baliokideak kapitalizazio konposatuan

Kapitalizazio bakunean gertatzen zen bezala, kapitalizazio konposatuan ere n denbora eta i interes unitarioa denbora-unitate berean adierazi behar dira.

Kapitalizazioa urte osoa ez den aldian egiten bada, adibidez, hiletan, seihilekotan..., interesak ere aldi horietan metatuko dira, eta interesa hilekoa edo seihilekoa... izan beharko da. Orduan formula horrela geratuko da:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i_k)^{nk}$$

i_k = hiruhileko, seihielko, etab. interes konposatu efektiboa

nk = seihilekotan, hiruhilekotan, etab. adierazitako denbora

k = seihilekoa, hiruhilekoa, etab. zenbat aldiz errepikatzen den

1.8. Urteko interesa (i) eta interes zatikatuaren (i_k) arteko erlazioa

Kapitalizazio konposatuan, kapitalizazio bakunean ez bezala, hileko, hiruhileko... interes-tasak eta urteko interes-tasa ez dira proportzionalak.

INTERES EFEKTIBOA i_k :

Bi interes-tasa edo gehiago baliokideak direla esaten dugu, epe berean kapital berari aplikatzean, azken kapital bera lortzen denean. Hau da kapitalizazio-faktoreek BEDINAK izan behar dute. Hau da:

$(1 + i) = (1 + i_k)^k$ -----berdinketa horretatik bakantzen (*despejando*):

$$i = (1 + i_k)^k - 1 \quad i_k = (1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1 \quad i_k = \sqrt[k]{(1 + i)} - 1$$

- $k=2$: seihilekoa denean
- $k=3$: lauhilekoa denean
- $k=4$: hiruhilekoa denean
- $k=6$: bihilekoa denean
- $k=12$: hilabetea denean
- $k=365$: egun arrazionalak direnean
- $k=360$: egun komertzialak direnean

Adibidea: Eragiketa batean hiruhileko % 2ko interes-tasa efektiboa aplikatu bada, kalkulatu urteko interes-tasa efektiboa.

$$i = (1 + i_k)^k - 1 = (1 + 0,02)^4 - 1 = 0,08243216 = \% 8,243216$$

Adibidea: Inbertsio batean urteko % 9ko interes-tasa efektiboa aplikatu bada, kalkulatu seihileko interes-tasa efektiboa.

$$i_k = \sqrt[k]{(1 + i)} - 1 = \sqrt[2]{(1 + 0,09)} - 1 = 0,04403065089 = \% 4,403065089$$

1.9. Interes-tasa efektiboa eta interes-tasa nominala

Interes tasa efektiboa i_k biderkatzen badugu urtean errepikatzen den aldiekin, **urteko interes nominala (J_k)** lortuko dugu. Tipo nominala pentsatuta dago " k " tantoa urtera pasatzeko. **Tipo teorikoa** da.

Urteko interes nominal hori (j_k) sei hilean behin, hiru hilean behin... kapitalizatzen da, (TIN= tipo de interés nominal capitalizable por....) **beti da urteko ehuneko** bat.

$$J_k = i_k \cdot k$$

i : urteko interes-tasa efektiboa

i_k : Hileko, hiruhileko,...interes tasa efektiboa

J_k : Urteko interes nominala hilekotan, seihilekotan,..., kapitalizagarria

J_k , interes nominala ez da interesen kalkuluetarako erabiltzen, soilik beste urteko interes batzuekin konparaketak egiteko.

Adibidea:

- Seihileko interes efektiboa bada $i_2 = \% 4$ ----urteko interes-tasa nominala seihilekotan kapitalizagarria j_2 izango da:

$$\text{Kalkulatzeko } J_k = i_k \cdot k \text{ ---- } J_2 = 0,04 \cdot 2 = 0,08 = \% 8$$

- Seihileko interes efektiboa $i_2 = \% 4$ bada----urteko interes-tasa efektiboa edo UTB i izango da:

$$\text{Kalkulatzeko } i = (1 + i_k)^2 - 1$$

$$i = (1 + i_2)^2 - 1$$

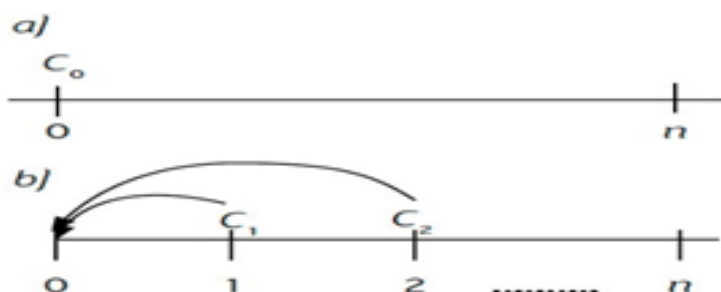
$$i = (1 + 0,04)^2 - 1 = 0,0816 = \% 8,16$$

Finantza-kontratu batean urteko interes-tasa efektiboa (i) (UTB) eta urteko interes-tasa nominala (J_k) (TIN) agertu behar dira.

1.10. Kapitalizazio konposatuko kapitalen baliokidetasuna

Bi kapital baliokideak dira, denboraren une berean baloratuta, berdinak badira.

Kapital bat edo batzuk beste kapital batekin edo batzuekin ordeztea, epemuga eta zenbateko desberdinekin, soilik egin ahal izango da baldin eta finantzarioki baliokideak badira.



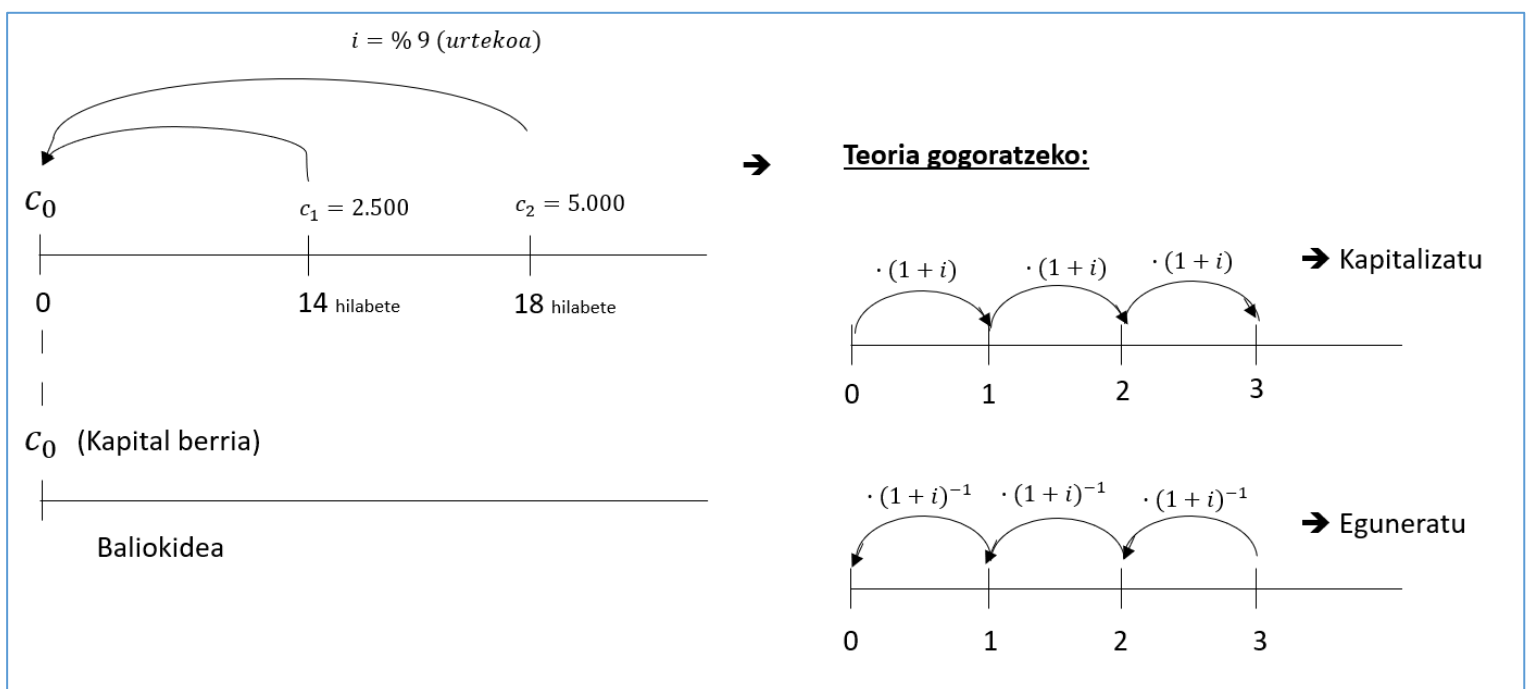
Bi aukera baliokideak diren ikusteko, une berean baloratutako kapitalak berdinak izatea bete behar da. Orduan baliokidetasuna 0 unean egingo dugu:

$$C_0 = C_1 \cdot (1 + i)^{-1} + C_2 \cdot (1 + i)^{-2}$$

Kapitalizazio konposatuan, bi kapital denboraren une batean baliokideak badira, edozein unetan baliokideak dira.

Adibidea: Ramírez jaunak bi zor ditu Canarias Jeans enpresarekin: bata, 2.500 €-koa, 14 hilabete barru amaitzen dena, eta bestea, 5.000 €-koa, 18 hilabete barru amaitzen dena. Bi zorrak kendu nahi ditu gaur. Eragiketari aplikatutako interesa urteko eskudiruaren % 9 bada, zer zenbateko ordaindu beharko du zorra kitatzeko?

- Zor 1: $C_1 = 2.500\text{€}$, $n = 14$ hilabete, $i = 0,09$
- Zor 2: $C_2 = 5.000\text{€}$, $n = 18$ hilabete, $i = 0,09$
- Gaur egungo zorraren zenbatekoa: $C_0 = ?$



- Baliokidetasun-printzipioa gertatzeko eta bi aldeetako batek ere ez galtzeko, kapital berriak 2 zorren batura izan behar du "0" unean:

$$C_0 = C_1 \cdot (1 + I)^{-n_1} + C_2 \cdot (1 + I)^{-n_2}$$

- Denbora eta interes tasa neurri berean:

i (urtekoa) → hiler pasatu:

$$\left. \begin{aligned} i_k &= (1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1 \\ i_k &= \sqrt[k]{(1 + i)} - 1 \end{aligned} \right\} \text{ Berdinak dira}$$

$$i_{12} = (1 + 0,09)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0072073 / i_{12} = \sqrt[12]{(1 + 0,09)} - 1 = 0,0072073$$

$$C_0 = 2.500 \cdot (1 + 0,0072073)^{-14} + 5000 \cdot (1 + 0,0072073)^{-18}$$

$$C_0 = 2.260,871617 + 4.393,700387$$

$$C_0 = 6.654,572004 \text{ € izango da zor berriaren kopurua.}$$

ARIKETAK

- 24.** Kalkulatu azken kapitala zein den 830.000 euro inbertitzen badira 7 urte eta 2 hilean, urteko % 5eko interes konposatuan.
- 25.** Kalkulatu azken kapitala zein den 17.487,25 euro ezartzen badira 2 urtean, hiruhileko % 2ko interes efektibo konposatuan.
- 26.** Zer da interesgarriagoa, 10.000 euro inbertitzea urte batean hiruhileko % 3ko interes efektibo konposatuan, edo urteko % 12,5eko efektiboan?
- 27.** Kalkulatu hiruhileko % 2,5eko interes efektibo konposatuaren baliokidea urtekotan.
- 28.** Kalkulatu urteko % 16ko interes efektibo konposatuaren baliokidea hiruhilekotan.
- 29.** Kalkulatu lauhilekotan kapitalizatzen den urteko % 3ko interes nominalaren urteko honenbesteko baliokidea.(Tanto equivalente anual)
- 30.** Kalkulatu azken kapitala zein den 20.000 euro ezartzen badira 2 urte eta 4 hilean, hilero kapitalizatzen den % 9ko interes nominalean.

- 31.** Kalkulatu hemendik 5 hilabetera Andonik jasoko duen zenbatekoa, gaur 30.000 euro ezartzen baditu banku batean urteko % 8ko interes efektibo konposatuan, eta kapitalizazioa hileka egiten bada. Gainera, interesari % 18 atxikitzen zaio PFEZa ordaintzeko.
- 32.** Maria andereari 20.000 euroko mailegu bat eman diote etxebizitza altzariz janzteko. Mailegua eta interesak 3 urte eta 4 hilean itzuli behar ditu. Merkatuko interes-tasa urteko % 7ko konposatua bada, zenbat diru itzuli beharko du?
- 33.** Zein interes-tasa efektibo konposatutan jarri genituen 20.000 euro 3 urte eta 9 hilean, 4.000 euroko interesak lortzeko?
- 34.** Kontu batean diru-sarrera bat egiten dut sei hileko % 2ko interes efektibo konposatuan. Zenbat denboraren buruan lortuko dut, interes gisa, hasieran jarritako kapitalaren laurdena?
- 35.** 20.000 euro ezartzen badira 2 urte eta 4 hilean, urteko % 9ko interes efektibo konposatuan. Zein izango da azken kapitala?
- 36.** Inbertitzaile batek 30.000 euro ditu eta horiek inbertitzeko 3 eskaintza:
- a. Lau hilekotan kapitalizatzen den urteko % 12ko nominalean
 - b. Urteko % 12ko efektibo konposatuan
 - c. Hilero kapitalizagarria den urteko % 12ko nominalean

Sailka itzazu eskaintzak lehenespen ordenaren arabera, eta arrazoitu.

- 37.** Corte Andaluz enpresak hurrengo zor hauek ditu Canaria Jeans enpresarekin:

<u>ZORRAK</u>	<u>EPEMUGA</u>
15.000 €	12 hilabete
25.000 €	18 hilabete

Enpresak gaur bi zorrak kitatzea proposatu dio. Horrelako eragiketetarako merkatuaren interesa urteko % 6 efektibo konposatua bada, zer zenbateko ordaindu behar du gaur Corte Andaluz-ek bietako bat ere gal ez dezaten?

- 38.** Alicia andreak 8.000 euroko zorra du eta gaur ordaindu behar dio Fuerteventurako Bankuari. Alicia andreak zorra honela ordaintzea proposatzen dio bankuari:

<u>Zorrak</u>	<u>Epemuga</u>
2.700 €	3 hilabete
2.700 €	6 hilabete
X €	9 hilabete

Bankuak hilero kapitalizatzen den % 12ko interes nominala kobratzen badio geroratzeagatik (por el aplazamiento), zer zenbateko ordaindu behar du Alicia jaunak bederatzi hilabetera bankuak proposamena onar dezan?

- 39.** Duela 4 urte Kutxan 2.500 euro ezarri genituen. Gordailuak hiruhileko % 1,5eko interes efektibo konposatua ordaintzen bazuen, kalkulatu gaur zenbateko kapitala edukiko dugun.
- 40.** Zenbat denbora beharko du urteko % 4,25eko interes konposatuan jarritako 8.650 euroko kapitalak bere balioa bikoizteko?
- 41.** Kontu batean 10.500 euro ezartzen ditugu sei hileko % 1,75eko interes efektibo konposatuan. Zenbateko interesak lortuko ditugu 4 urte eta erdian?
- 42.** Zein hiruhileko interes-tasa efektibo konposatutan jarri genituen 32.000 euro 3 urtean, 2.967,26 euroko interesak lortzeko?
- 43.** Kalkulatu hiruhileko % 1,6ko efektibo konposatuaren baliokidea urtekotan.
- 44.** Kontu batean 10.000 euro sartzen ditut hilero kapitalizatzen den urteko % 4ko interes nominalean. Zenbat denboraren buruan erosi ahal izango dut 18.664 euroko autoa?
- 45.** 250.000 euroko etxea erosi nahi dut. Dena eskudirutan ordaindu nahi ez badut, saltzaileak beste aukera hau eskaintzen dit: orain % 20 ordaintzea, eta gero, bi letra: bat, 60.000 eurokoa, 3 hilean ordaintzeko; eta, bestea, 150.000 eurokoa, 2 urtean ordaintzeko. Interesa urteko % 10eko efektibo konposatua bada, zein aukera da merkeena?

- 46.** Kontu batean 4.200 euro jartzen baditut hiruhilekotan kapitalizatzen den % 6ko nominalean, 6 urte eta erdiren buruan 6.000 euroko ordainketa egin ahal izango dut?
- 47.** Arrieta jauna banku-bulego bateko zuzendaria da. Jakin nahiko luke zenbat diru jarri zuen bezero batek epe finkorako gordailu batean, urteko % 3ko efektibo konposatuan, 5 urteren buruan 23.185,48 euro lortu baditu.